b) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$ on a : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+)(2n+1)}{6}$

• pour $n=1$, $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$

• supposons que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et montrons que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right) = (n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \text{ d'où } \forall n \in \mathbf{N},\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

c) On prend $x = \frac{k}{n^2}$ dans (*) on obtient :

$$\forall k \geq 1,\ \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2n^4} \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 \leq U_n \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

or $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

d'où $\forall n \geq 1,\ \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq U_n \leq \frac{n+1}{2n}$

• $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

• $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ d'où $(U_n)_{n\geq 1}$ est une suite convergente vers $\frac{1}{2}$.